حلقات الزمر صفرية الإدخال

Zero Insertive Group Rings

أماني صبيح

Amani Sbeih

قسم العلوم الأساسية. كلية الزرقاء الحكومية. جامعة البلقاء التطبيقية. الأردن

بريد الكتروني: amany_dms@yahoo.com

تاريخ التسليم: (٢٠٠٧/٦/٤). تاريخ القبول (٢٠٠٨/٥/١٢)

ملخص

يهدف البحث إلى ايجاد الشروط اللازمة والكافية على الحلقة A والزمرة G لكي تكون حلقة الزمر A[G]، zi - حلقة أو zc - حلقة أو duo - حلقة. وفي هذا البحث قد وجدنا أنه إذا كانت G زمرة دورية فإن الشرط اللازم لكي تكون A[G]، zi -حلقة هو أن تكون G هاملتونية وأن تكون A، zi - حلقة. ثم وجدنا شروطاً كافية لكي تكون A[G]، zi – حلقة.

Abstract

The aim of this research is to find the necessary and sufficient conditions on a ring A and a group G for which the group ring A[G] to be a zero insertive ring (zi-ring), a zero commutative ring (zc-ring), and a duo- ring. In this paper, we found that the necessary conditions for A[G] to be zi-ring are that G must be Hamiltonian group and A is zi-ring whenever G is a periodic group. Also similar results for A[G] to be zc-ring and duo-ring are given.

مقدمة

إن دراسة حلقات الزمر من الدراسات المهمة في الجبر في الوقت الحاضر. ومع تقدم علم الجبر الحديث، نجد أن العديد من الأسئلة تطرح على حلقات الزمر ومن هذه الأسئلة مثلاً:

ما هي الشروط اللازمة والكافية على الحلقة A والزمرة G حتى تمتلك حلقة الزمر A[G] خاصية ما، مثل: الخاصية النيوثرية (Noetherian)، والخاصية الأرتينية (Artinian)، ... وفي هذا البحث سنحاول الإجابة على سؤال من هذا النمط آلا وهو: ما هي الشروط اللازمة والكافية على الحلقة A والزمرة G حتى تكون حلقة الزمرة A[G]، zi - حلقة.

1. § - مصطلحات وتعاريف وملاحظات أولية:

في هذا البحث سوف نستخدم الرموز والمصطلحات التالية:

١. A[G] سترمز لحلقة الزمرة الضربية G فوق الحلقة A.

٢. إذا كانت H زمرة جزئية من G فإن $\omega_G(H)$ سترمز للمثالية إلى اليسار من A[G] المولدة بالمجموعة $\{1-h\}_{h\in H}$. وإذا كان $g\in G$ فإن <g> سترمز للزمرة الجزئية الدورية المولدة بـ g.

٣. إذا كانت X مجموعة جزئية من حلقة ما R فإن:

- عادمة X إلى اليسار (left annihilator of X) هي بالتعريف:

$$(X)^l = \{r \in R;\ r\,x = 0\ \forall\ x \in X\}$$

- عادمة X إلى اليمين (right annihilator of X) هي بالتعريف:

$$(X)^r = \{r \in R;\ x\,r = 0\ \forall\ x \in X\}$$

٤. يمكن أن نرى بسهولة أن $(X)^l$ مثالية إلى اليسار من R وأن $(X)^r$ مثالية إلى اليمين من R.

٥. جميع الحلقات المستخدمة في هذا البحث هي حلقات واحدية (Unitary rings).

تعريف 1.1 (Menal, 1979, p. 204):

a. نقول عن حلقة R أنها l.i.r.i - حلقة (left ideal right ideal) إذا كانت كل مثالية إلى اليسار من R هي أيضاً مثالية إلى اليمين من R.

b. نقول عن حلقة R أنها l.a.r.i. - حلقة (left annihilator right ideal) إذا كانت $(X)^l$ مثالية إلى اليمين من R مهما كانت المجموعة الجزئية X من R.

تعريف 2.1 (Sehgal, 1978, p. 8):

a. نقول عن حلقة R أنها zc - حلقة (zero commutative ring) إذا كانت تحقق الشرط التالي :

$\alpha\,\beta = 0$ then $\beta\,\alpha = 0$ for all $\alpha, \beta \in R$

b. نقول عن حلقة R أنها zi - حلقة (zero insertive ring) إذا كانت تحقق الشرط التالي:

$\alpha\,\beta = 0$ then $\alpha\, x\, \beta = 0$ for all $\alpha, \beta, x \in R$

c. نقول عن حلقة R أنها duo - حلقة إذا كانت تحقق الشرط التالي:

جميع مثالياتها هي مثاليات من الجانبين.

تعريف 3.1 (Sehgal, 1978, p. 10):

نقول عن زمرة G أنها زمرة هاملتونية (Hamiltonian group) إذا كانت كل زمرة جزئية من G نظامية (Normal) في G.

ملاحظات 1.1 :

لتكن R حلقة ما. لدينا ما يلي:

١. اذا كانت R هي l.i.r.i - حلقة فإن R l.a.r.i - حلقة.

البرهان: (واضح من التعريف 1.1).

٢. اذا كانت R هي zc - حلقة فإن R zi - حلقة (وردت هذه الملاحظة في (Habeb, 1994, p.12) ولكن دون برهان).

البرهان:

ليكن $\alpha,\beta \in R$ يحققان $\alpha\beta=0$ عندئذٍ $\beta\alpha=0$ لأن R هي zc - حلقة ومنه $\beta\,\alpha\,x = 0$ ، $\forall\, x \in R$ أي $\beta\,(\alpha\, x) = 0$. وبما أن R هي zc – حلقة فإن هذا يؤدي إلى $(\alpha\, x)\,\beta = 0$ أو $\alpha\, x\, \beta = 0$ ومعنى هذا أن R هي zi - حلقة.

٣. اذا كانت R duo - حلقة فإن R zi - حلقة {وردت هذه الملاحظة في (Habeb, 1994, p.12) ولكن دون برهان}.

البرهان: (مماثل لبرهان 2^{o}).

٤. اذا كانت R l.a.r.i - حلقة فإن R zi - حلقة.

البرهان: (مماثل لبرهان 2^o).

٥. اذا كانت R zi - حلقة فإن R l.a.r.i - حلقة (Habeb, 1990, p. 73).

البرهان: (مماثل لبرهان 2^o).

ملاحظة 2.1 (Habeb, 1994, p. 14) :

zc - حلقة

⇓

duo - حلقة ⇐ zi - حلقة

(المخطط A)

نستخلص من الملاحظات السابقة ما يلي:

zc - حلقة

⇓

duo - حلقة ⇐ zi - حلقة

⇓ ⇕

l.i.r.i - حلقة ⇐ l.a.r.i - حلقة

(المخطط B)

§.2 - شروط لازمة لكي تكون حلقة الزمر A[G]، zi - حلقة.

تمهيدية 1.2 (Ahmad, 1977, p. 40):

إذا كانت H زمرة جزئية من G وكان $g \in G$ فإن:

$g \in H$ if and only if $1- g \in \omega_G(H)$

تمهيدية 2.2:

لتكن G زمرة ما، ولتكن A حلقة ما، إذا كان $g \in G$ ذو رتبة منتهية n، واذا وضعنا:

$H = \langle g \rangle = \{1, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$

$\alpha = 1 + g + g^2 + ... + g^{n-1}$

فإنه في حلقة الزمر $A[G]$ يكون لدينا:

$$\omega_G(H) = (\alpha)^l$$

البرهان: واضح أن:

$$h\alpha = \alpha \ \forall h \in H$$

وينتج عن هذا أن:

$$(1-h)\alpha = \alpha - h\alpha = \alpha - \alpha = 0 \ \forall h \in H$$

ومن تعريف $\omega_G(H)$ ينتج ما يلي:

$$x \in \omega_G(H) \text{ then } x = \sum_i r_i(1-h_i);\ r_i \in A[G] \text{ and } h_i \in H$$

ومنه:

$$x\alpha = \sum_i r_i(1-h_i)\alpha = \sum_i r_i[(1-h_i)\alpha] = 0$$

ومعنى هذا أن $x \in (\alpha)^l$، إذن:

$$(1)\quad \omega_G(H) \subseteq (\alpha)^l$$

من جهة ثانية: إذا كانت $B = \{x_j\}_{j\in J}$ مجموعة ممثلات صفوف التكافؤ إلى اليسار لـ G بحسب H فإن $G = \bigcup_j x_j H$ ومنه:

$$g \in G \text{ then } g = x_j h;\ j \in J \text{ and } h \in H$$

وينتج عن هذا أن:

$$y \in (\alpha)^l \text{ then } y \in A[G] \text{ and } y\alpha = 0$$

ولكن:

$$y = \sum_i a_i g_i = \sum_i a_i x_{j_i} h_i = \sum_i x_{j_i} b_i$$

حيث $x_{j_i} \in B$ و $b_i \in A[H]$

ومنه:

$$0 = y\alpha = (\sum_i x_{j_i} b_i)\, \alpha = \sum_i x_{j_i} (b_i\alpha)$$

حيث $\forall i , b_i \alpha \in A [H]$.

وبمـا أن المجموعـة B تـشكل قاعـدة للموديـول الحـر $A[G]$ علـى الحلقـة $A[H]$ **(Renault, 1970, p.57)** فإن المجموعة $\{x_{j_i}\}$ مستقلة خطياً على $A[H]$ ولذلك فإن المساواة السابقة تؤدي إلى: $\forall i , b_i \alpha = 0$، ولكن لدينا $b_i \in A [H]$ ولذلك فإن:

$$b_i = \sum_k C_{i_k} h_k;\ C_{i_k} \in A \text{ and } h_k \in H$$

ومنه:

$$0 = b_i\ \alpha = \sum_k (C_{i_k}\ h_k)\, \alpha = \sum_k C_{i_k} (h_k\alpha) = \sum_k C_{i_k}\, \alpha = (\sum_k C_{i_k})\, \alpha$$

وهذا يعني أن $\sum_k C_{i_k} = 0$ لأن $A[H]$ هو A - موديول حر وقاعدته عناصر H.

وبالتالي:

$$- b_i = 0 - \sum_k C_{i_k}\ h_k = \sum_k C_{i_k} - \sum_k C_{i_k} h_k = \sum_k C_{i_k}\ (1-h_k) \in \omega_G\ (H)$$

وبالتالي:

$$y = \sum_i x_{j_i} b_i \in \omega_G (H)$$

أي أن:

$$(2) \qquad (\alpha)^l \subseteq \omega_G (H)$$

من (1) و(2) نجد أن $\omega_G (H) = (\alpha)^l$ وهو المطلوب.

مبرهنة 1.2:

لتكن G زمرة دورية. إذا كانت $A[G]$ هي zi – حلقة، فإن A ستكون zi – حلقة و G ستكون زمرة هاملتونية.

البرهان:

ليكن $\alpha, \beta \in A$ بحيث أن$\alpha\, \beta = 0$. بما أن $A \subseteq A[G]$ و $A[G]$ هي

zi – حلقة، فإنه $\forall x \in A[G]\ ,\ \alpha x \beta = 0$ ، وبالتالي $\forall x \in A,\ \alpha x \beta = 0$.
إذن A هي zi - حلقة.

لنبرهن الآن على أن G هاملتونية:

ليكن $g \in G$ ذو رتبة n ولنضع $H = \langle g \rangle = \{1, g, \dots, g^{n-1}\}$

و$\alpha = 1 + g + \dots + g^{n-1}$ عندئذ ينتج عن التمهيدية 2.2 أن $\omega_G(H) = (\alpha)^l$. وبما أن A[G] هي zi -حلقة فإن A[G] هي l.a.r.i - حلقة بحسب المخطط (B) السابق أي أن $(\alpha)^l$ هي مثالية من الجانبين، أي أن $\omega_G(H)$ هي مثالية من الجانبين في A[G]. وينتج عن هذا أن H زمرة جزئية نظامية من G لأنه إذا كان

$h \in H$ و $g^* \in G$ فإن $1-h \in \omega_G(H)$ وبما أن $\omega_G(H)$ مثالية من الجانبين

فإن $g^*(1-h)g^{*-1} \in \omega_G(H)$ أي أن $1-g^*hg^{*-1} \in \omega_G(H)$. وبما أن $g^*hg^{*-1} \in G$ فإنه ينتج عن التمهيدية 1.2 أن $g^*hg^{*-1} \in H$ إذن $H = \langle g \rangle \lhd G$ وبالتالي فإن كل زمرة جزئية من G هي نظامية في G أي أن G زمرة هاملتونية وهو المطلوب.

ملاحظة

إذا كانت G زمرة منتهية (Finite) أو منتهية محلياً (Locally Finite) فإنها تكون دورية (Periodic) وبالتالي تنطبق عليها المبرهنة السابقة.

نتائج 1.2

يمكن أن نستخلص من المبرهنة السابقة ومن المخطط B أنه إذا كانت G زمرة دورية

(بشكل خاص منتهية أو منتهية محليا) وكانت A حلقة ما فإن:

١. اذا كانت A[G] l.a.r.i - حلقة فإن A l.a.r.i و G زمرة هاملتونية .
٢. اذا كانت A[G] zc - حلقة فإن A zc - حلقة و G زمرة هاملتونية.
٣. اذا كانت A[G] duo - حلقة فإن G زمرة هاملتونية.
٤. اذا كانت A[G] l.i.r.i - حلقة فإن G زمرة هاملتونية.

3 . § - شروط كافية لكي تكون حلقة الزمر A[G]، zi - حلقة

تعاريف 1.3 (Lambek, 1967, p. 82):

a. نقول عن حلقة R أنها وراثية الى اليمين (Right hereditary) إذا كانت كل مثالية إلى اليمين من R إسقاطية (Projective).

b. نقول عن حلقة R أنها نصف وراثية إلى اليمين (Right semihereditary) إذا كانت كل مثالية إلى اليمين من R ومولدة بعدد منته من العناصر إسقاطية.

c. نقول عن حلقة R أنها prp - حلقة (Principal right Projective) إذا كانت كل مثالية الى اليمين من R ورئيسية، إسقاطية.

* واضح أن: حلقة وراثية الى اليمين تؤدي الى حلقة نصف وراثية إلى اليمين وتؤدي الى prp – حلقة.

تمهيدية 1.3 (Anderson & Fuller, 1974 , p. 68):

إذا كانت R حلقة نيوثرية الى اليمين (أو إلى اليسار) فإن R لا تحوي مجموعة غير منتهية من العناصر الجامدة المتعامدة (Orthogonal idempotents).

البرهان:

لتكن $e_1 , e_2 , e_3, ...$ مجموعة من العناصر الجامدة المتعامدة المختلفة عن الصفر في R. عندئذ تكون السلسلة الصاعدة من المثاليات لليمين التالية:

$$e_1 R \subseteq e_1 R + e_2 R \subseteq e_1 R + e_2 R + e_3 R \subseteq ...$$

متوقفة بعد عدد منته من الحدود لأن R نيوثرية الى اليمين، وبالتالي يوجد $m \in N$ بحيث يكون:

$$e_1 R + e_2 R + ... + e_m R = e_1 R + e_2 R + ... + e_m R + e_{m+1} R \qquad (1)$$

وبما أن $e_1 , e_2 , ...$ متعامدة فإن $e_i e_j = 0$, $\forall i \neq j$.

ولذلك ينتج عن ضرب العلاقة (1) بـ e_{m+1} من اليسار أنه إذا كان e_{m+1} مختلفا عن $e_1 , e_2,...,e_m$ فإن $e_{m+1} R = 0$ وبما أن R حلقة واحدية فإن هذا يعني أن $e_{m+1} = 0$ وبالتالي فإن مجموعة العناصر الجامدة المتعامدة في R هي: $\{o , e_1 , e_2 , ..., e_m\}$ فهي مجموعة منتهية.

تمهيدية 2.3 (Small, 1967, p. 73):

إذا كانت R، prp - حلقة ولا تحوي مجموعة غير منتهية من العناصر الجامدة المتعامدة

فإن $(X)^l = Re$ (وكذلك $(X)^r = eR$) حيث $e^2 = e$ وذلك حيث $\forall \phi \neq X \subseteq R$.

تمهيدية 3.3:

إذا كانت R حلقة واحدية تملك عنصراً جامداً e ليس مركزيا فيها، فإن أحد الشرطين التاليين – على الأقل- سيكون محققا:

a. R تحوي عنصرا $\alpha \neq 0$ يحقق:

$e \alpha = \alpha$ and $\alpha e = 0$

b. R تحوي عنصرا $\beta \neq 0$ يحقق:

$\beta e = \beta$ and $e \beta = 0$

البرهان:

بما أن e ليس من مركز R فإنه يوجد $x \in R$ بحيث يكون $ex \neq xe$ ومنه فإن العنصر exe لا يمكن أن يساوي بآن واحد xe وex.

إذا كان $exe \neq ex$ فإننا نضع $\alpha = exe-ex$ فنجد أن $\alpha \neq 0$ وأن $e\alpha = \alpha$ ولكن:

$\alpha e = exe-exe = 0; e^2 = e$

وإذا كان $exe \neq xe$ فإننا نضع $\beta = exe-xe$ فنجد أن $\beta \neq 0$ وأن $\beta e = \beta$ ولكن:

$e \beta = exe-exe = 0.$

نتيجة 1.3 {وردت هذه النتيجة في (Habeb, 1990, p. 73) **ولكن دون برهان**}:

إذا كانت R، zc - حلقة فإن جميع عناصرها الجامدة ستكون مركزية.

البرهان:

إذا كانت R تحوي عنصراً جامداً وغير مركزي e فإنه من التمهيدية السابقة يوجد $\alpha \neq 0$ بحيث $e \alpha \neq 0$ and $\alpha e = 0$ (أو $\alpha e \neq 0$ and $e \alpha = 0$)، ولكن R، zc – حلقة يعني أن $\alpha e = 0$ then $e \alpha = 0$ (أو $e \alpha = 0$ then $\alpha e = 0$) ونحصل على التناقض.

ملاحظة 1.3 (Habeb, 1994, p. 14)

إذا كان e جامداً في الحلقة R ويحقق $Re = eR$ فإن e يكون مركزياً في هذه الحلقة لأنه من أجل كل $r \in R$ لدينا:

$re \in Re = eR$ then $re = er^{-}$ then $ere = er^{-} = re$

ثم إن:

$er \in eR = Re$ then $er = r^{=} e$ then $ere = r^{=} e = er$

منه: $re = ere = er$ وبالتالي e مركزي.

مبرهنة 1.3:

إذا كانت R حلقة واحدية ونيوثرية إلى اليمين و prp - حلقة فإن الشروط التالية متكافئة:

١. R هي zc - حلقة.

٢. R هي zi - حلقة.

٣. جميع العناصر الجامدة في R مركزية.

البرهان:

$2 \Rightarrow 1$: من المخطط B.

$3 \Rightarrow 2$: ليكن e جامداً في R عندئذٍ لدينا $R(l\text{-}e) = (l\text{-}e)R$ لأن:

$x \in R(l\text{-}e)$ then $x = r\,(l\text{-}e)$; $r \in R$

لدينا $e\,(1\text{-}e) = 0$ وبما أن R هي zi - حلقة فإن $er\,(1\text{-}e) = 0ex =$ ومنه :

$x = x - 0 = x - ex = (1\text{-}e)\,x \in (1\text{-}e)\,R$

إذن $R(l\text{-}e) \subseteq (l\text{-}e)R$ وبالمثل نجد الإحتواء المعاكس ، إذن $R(l\text{-}e) = (l\text{-}e)R$ وبما أن l-e جامد فإنه ينتج عن الملاحظة 1.3 أن l-e جامد مركزي في R وبالتالي e مركزي في R.

$1 \Rightarrow 3$: بما أن R نيوثرية إلى اليمين فإن R لا تحوي مجموعة غير منتهية من العناصر الجامدة بحسب التمهيدية 1.3. وبما أن R هي prp - حلقة فإن: $(\beta)^1 = Re$ حيث $e^2 = e$ وذلك $R \supseteq \beta \neq \phi\ \forall$ بحسب التمهيدية 2.3، وبما أن e جامد في R، فإن e مركزي في R، وبالتالي فإن $Re = eR$، ومن ثم فإن$(\beta)^1 = eR$. وبما أن $\alpha \in (\beta)^1 = eR$، فإن $\alpha \in eR$ وبالتالي فإن $\alpha = er$ حيث $r \in R$ ولذلك $\alpha\beta = 0$.

وبما أن R حلقة واحدية فإن: $e = e.l \in eR = (\beta)^1$ وبالتالي فإن$e\beta = 0$. وبما أن e مركزي فإن $\beta e = 0$، وبالتالي فإن $r = 0$. $\beta\, e\, r = 0$ أي أن $\alpha = 0$ β ومعنى هذا أن R هي zc - حلقة.

تمهيدية 4.3:

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n قابلة للقلب في الحلقة A وإذا كانت A نيوثرية إلى اليمين ووراثية فإن A[G] تكون حلقة نيوثرية إلى اليمين وprp - حلقة.

البرهان:

إن A[G] نيوثرية إلى اليمين **(**Lambek, 1967, p. 153**)** ثم إن A[G] وراثية لأنه إذا كانت I مثالية إلى اليمين من A[G] فإن I تكون A - موديول إلى اليمين.

وبما أن A[G] هي A - موديول حر فإن A[G] هي A - موديول إسقاطي إلى اليمين.

بما أن A وراثية فإن كل A - موديول جزئي إلى اليمين من A[G] هو A - موديول إسقاطي إلى اليمين **(**Lambek, 1967, p. 86**)**.

إذن I هي A - موديول إسقاطي إلى اليمين وينتج أن I هي A[G] - موديول إسقاطي إلى اليمين **(**Lambek, 1967, p. 154**)** ومعنى هذا أن A[G] حلقة وراثية إلى اليمين وبالتالي prp - حلقة.

نتيجة 2.3 :

ضمن الشروط المفروضة على الزمرة G وعلى الحلقة A في التمهيدية السابقة، تكون الشروط التالية متكافئة على A[G].

١. A[G] هي zc - حلقة.

٢. A[G] هي zi - حلقة.

٣. جميع العناصر الجامدة في A[G] مركزية.

البرهان:

ينتج مباشرة عن التمهيدية 4.3 والمبرهنة 1.3.

نتيجة 3.3:

إذا كانت G منتهية رتبتها n قابلة للقلب في A وإذا كانت A نيوثرية إلى اليمين ونظامية فإن A[G] ستكون نظامية **(**Lambek, 1967, p.155**)**، وهذا يؤدي الى أن تكون A[G] نصف وراثية **(**Lambek, 1967, p. 86**)** وبالتالي A[G] هي prp - حلقة ، ثم إن A[G] نيوثرية إلى اليمين وبالتالي تكون الشروط الواردة في النتيجة السابقة متكافئة على A[G].

ملاحظة

إذا كانت n رتبة الزمرة G قابلة للقلب في الحلقة A فإننا نستطيع أن نبرهن على أن :

A[G] ، zi - حلقة وهذا يؤدي الى أن G زمرة هاملتونية.

البرهان

ليكن $g \in G$ عندئذ $\alpha = l/n(1 + g + ... + g^{n-1})$ جامد في A[G] ولذلك فهو مركزي لأن A[G]، zi – حلقة وبالتالي $\langle g \in G ; g \in supp\ \alpha \rangle$ زمرة نظامية في G (Sehgal, 1978 , p. 40)، ولكن $\langle g \in G, g \in Supp\ \alpha \rangle = \langle g \rangle$ إذن $\langle g \rangle \lhd G$ و G هاملتونية.

References

- Ahmad, M. (1977). “Sur l’isomorphisme d’anneaux de groupes”. Un published diss. Universite` de Provence, France.
- Anderson, F. & Fuller, K. (1974). Rings and categories of modules. New York.
- Habeb, J. (1990). “A note on zero commutative rings”. Math. J. Okayama University. 32(1). 73-76.
- Habeb, J. (1994). “On certain zero insertive rings”. Journal of Abhath al-yarmouk. 3(2). 9-15.
- Lambek, J. (1967). Lectures on rings and modules. Chelsea Pub. Corp, New York.
- Menal, P. (1979). “Group ring in which every left ideal is a right ideal”. Proc. AMS. 76(2). 204-208.
- Renault, G. (1970). Sur Les anneaux de groupes”. seminaire d’algebre non com. exp. No. 2, publication math.de L’universite d` Orsay.
- Sehgal, S. (1978). Topics in group rings. Marcel Dekker inc., New York.
- Small, L. (1967). “Semihereditary rings”. Bull. AMS. 73(1). 656-658.